Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 van 2
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum: 9 nov 2007
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Kulske

9.5 / 1

1.5

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{2}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi_1^2 \text{ verdeling}$$

$T_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}}\right)$ heeft een t_{n-1} verdeling (Lemma 12.9 Kalman-bettling)

• dus $T = \sqrt{2}\,\frac{\bar{X}}{S}$ heeft een $t_{2-1} = t_1$ verdeling ✓

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{S}{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{2\bar{X}^2}}$$

S^2 heeft χ_1^2 verdeling dus er is een $Z \sim N(0,1)$ zodat $Z^2 = S^2$, dus S heeft een $N(0,1)$ verdeling

$$2\bar{X} = 2\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(X_1+X_2)^2 \sim \chi_1^2$$

dus $\frac{1}{T} = \frac{S}{\sqrt{2\bar{X}^2}}$ heeft een t_1 verdeling

moet je ook bewijzen dat Z en $\bar{X}$ onafh. zijn.

T heeft dus dezelfde verdeling als $\frac{1}{T}$, dus heeft $|T|$ dezelfde verdeling als $\frac{1}{T}$

2 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ Poisson(λ) o.o.i.v.

2

a) $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p_X(k_i;\lambda)$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum k_i}}{\prod k_i!}$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \ln(\lambda^{\sum k_i}) - \ln\left(\prod k_i!\right)$$
$$= -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(\lambda) - \ln\left(\prod k_i!\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \frac{1}{\lambda} - 0$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda_e) = 0 \Rightarrow \lambda_e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

onafhankelijke X_i's

b) Zuiver? Als $E(\lambda_e) = \lambda$

$E(\lambda_e) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$

Dus hij is zuiver!

* Consistent als $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Met Chebyshev's ongelijkheid:

$\mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} Var(\lambda_e)$

X_i's onafhankelijk

$Var(\lambda_e) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

$= \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2 = \sigma^2/n$

$1 \geq \mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) \geq 1 - \underbrace{\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}_{\text{staat vast}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{kan heel klein gemaakt worden}}$

Dus $1 \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n}\right) = 1$

$1 \geq \mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) \leq 1$ ~~[illegible]~~ 1 is,

dus $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\lambda_e - \lambda| < \varepsilon) = 1$, dus λ_e is consistent.

* sufficiënt voor λ als $L(\lambda)$ product is van $g(\lambda_e, \lambda)$ en een $b(k_1, \ldots, k_n)$

$L(\lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i}}{\prod_{i=1}^{n} k_i!} = \underbrace{e^{-n\lambda} \lambda^{n \cdot \lambda_e}}_{g(\lambda_e, \lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}}_{b(k_1, \ldots, k_n)}$

Dus is sufficiënt.

3 a) Fisher-Informatie $I(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{d}{d\lambda} \ln p_X(k, \lambda)\right)^2\right]$

(2)

Hier is $p_X(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k!}$ $\quad \ln p_X(k, \lambda) = -\lambda + k \ln\lambda - \ln(k!)$

$\frac{d}{d\lambda} \ln p_X(k, \lambda) = -1 + \frac{X_i}{\lambda} - 0 = \frac{X_i}{\lambda} - 1$

Dus $I(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{X_i}{\lambda} - 1\right)^2\right] = \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{X_i^2}{\lambda^2} - 2\frac{X_i}{\lambda} + 1\right)$

$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\lambda^2} - 2\frac{x}{\lambda} + 1\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

$= \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}(X^2) - 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X) + 1$

$= \frac{1}{\lambda^2}\left(Var(X) + (\mathbb{E}(X))^2\right) - 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda + 1$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2 van 2
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Statistiek
Postcode en		Datum: 4 nov 2007
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Külske

b) Cramér-Rao afschatting: $\frac{1}{n \cdot I(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} \leq Var(\lambda_e)$

$Var(\lambda_e) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n}$ Dus gelijkheid!

zie 2b)

✓

4   2

$X_1, X_2, \ldots$ o.o.i.v., $\mathbb{E}(|X_i|^4) < \infty$

Toon aan $M = \frac{1}{\sqrt{n}\log n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$

$P(|M - 0| \geq \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}\log n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \varepsilon\right)$

$\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}\log n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right|\right)$

$= P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}\log n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right|^4 \geq \varepsilon^4\right)$

$\leq \frac{1}{\varepsilon^4} \mathbb{E}(|M|^4)$

en $\mathbb{E}(|M|^?) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\right)^4 \left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^4\right)$

$= \frac{1}{n^2(\log n)^4} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^4\right) = \frac{1}{n^2(\log n)^4} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right)$

Ga over op $X_i' = X_i - \mathbb{E}X_i$

$= \frac{1}{n^2(\log n)^4} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_i X_j X_k X_l\right)$

$\mathbb{E}(X_i) = 0$

$= \frac{1}{n^2(\log n)^4} \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l)$

want $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = 0$, tenzij indices paarsgewijs gelijk

$= \frac{3}{n^2(\log n)^4} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) + \frac{1}{n^2(\log n)^4} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4$

$= \frac{3}{n^2(\log n)^4} n(n-1) \mathbb{E}(X_1^2)^2 + \frac{1}{n^2(\log n)^4} n \mathbb{E}(X_1^4)$

$= \frac{3}{(\log n)^4} \mathbb{E}(X_1^2)^2 - \frac{\mathbb{E}(X_1^2)^2}{n(\log n)^4} + \frac{1}{n(\log n)^4} \underbrace{\mathbb{E}(X_1^4)}_{< \infty}$

$\leq \frac{C}{(\log n)^4}$ voor zekere $C < \infty$

Dan $P(|M - 0| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \mathbb{E}(|M|^4) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{C}{(\log n)^4} \to 0$

als $n \to \infty$

✓

5

2

jan	feb	maa	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
252	255	240	294	201	266	295	230	257	227	229	[illegible]

H_0: $p_i = 1/12$ voor elke maand dat kind geboren wordt.

Totaal kinderen: $3093 = n$ maanden: $t = 12$

Test statistiek $D = \sum_{i=1}^{t} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$ ongeveer $\sim \chi^2_{t-1}$

$$d = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{12} (X_i - np)^2 = \frac{1}{3093 \cdot \frac{1}{12}} \cdot (6294.25)$$

$$= 24{,}4 \mid 442$$

$\chi^2_{1-\alpha, t-1} = \chi^2_{0{,}95;11} = 19{,}675$

$d > 19{,}675$, dus H_0 afwijzen.

p-waarde $= P(D > d_{obs}) = P(D > 24{,}4)$

$= 1 - P(D < 24{,}4)$

$\approx 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

V